

Сопряженные уравнения и простейшие обратные задачи

Лектор: д.ф.м.н., профессор
Темирбеков Н.М.

- Рассмотрим сначала одномерную задачу:
- $$-\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi}{dx} = f, 0 \in (0,1), \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \quad (8.1)$$
- где $f \in L_2(0,1)$. Предположим сначала, что $k = k(x)$ - неизвестная функция, которую необходимо определить. Пусть имеется априорная информация, что $k(x)$ - кусочно- постоянна, т.е.
- $$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ k_2, & 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (8.2)$$

где k_1, k_2 - пока неизвестные числа. Предположим также, что $\varphi(x)$ - непрерывная функция, обладающая непрерывным "поток" $k \frac{d\varphi}{dx}$ и удовлетворяющая почти всюду уравнению (8.1) и граничным условиям $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

$$J_1 = \int_0^1 p_1 \varphi dx, \quad J_2 = \int_0^1 p_2 \varphi dx, \quad (8.3)$$

p_1 и p_2 функции измерения

$$-\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi_1^*}{dx} = p_1, \quad \varphi_1^*(0) = \varphi_1^*(1) = 0, \quad (8.4)$$

$$-\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi_2^*}{dx} = p_2, \quad \varphi_2^*(0) = \varphi_2^*(1) = 0, \quad (8.5)$$

$$-\int_0^1 \varphi_1^* \frac{d}{dx} k \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_1^* dx. \quad (8.6)$$

$$-\int_0^1 \varphi_1^* \frac{d}{dx} k \frac{d\varphi}{dx} dx = -k \varphi_1^* \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx. \quad (8.7)$$

$$\int_0^1 k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_1^* dx. \quad (8.8)$$

$$\int_0^1 k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_2^* dx. \quad (8.9)$$

$$J_1 = \int_0^1 p_1 f \varphi_1^* dx, \quad J_2 = \int_0^1 p_2 f \varphi_2^* dx \quad (8.10)$$

$$\int_0^1 k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = J_1, \quad \int_0^1 k \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = J_2, \quad (8.11)$$

$$k_1 \int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx + k_2 \int_{1/2}^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = J_1, \quad (8.12)$$

$$k_1 \int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx + k_2 \int_{1/2}^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = J_2,$$

$$\int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = a_{11}, \quad \int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = a_{21}, \quad (8.13)$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = a_{12}, \quad \int_{1/2}^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_2^*}{dx} dx = a_{22},$$

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 = J_1, \quad (8.14)$$

$$a_{21}k_1 + a_{22}k_2 = J_2.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$p_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad (8.15)$$

$$p_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \sin \pi x,$$

$$\varphi_1^*(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{5}{6}x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

$$\varphi_2^*(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -2x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{2}{3}, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

$$J_1 = \int_0^1 p_1 \varphi dx = \int_0^{1/2} \varphi dx = \int_0^{1/2} \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi},$$

$$J_2 = \int_0^1 p_2 \varphi dx = \int_{1/2}^1 \varphi dx = \int_{1/2}^1 \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi}.$$

Вычислим a_{ij} ($i, j = 1, 2$) из (8.13)

$$a_{11} = \int_0^{1/2} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi_1^*}{dx} dx = \int_0^{1/2} \pi \cos \pi x (-2x +$$

$$\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{6}\right) k_1 + \frac{1}{3} k_2 = \frac{1}{\pi},$$

$$\frac{1}{3} k_1 + \left(\frac{4}{\pi} - \frac{2}{3}\right) k_2 = \frac{1}{\pi},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{\pi} - \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{\pi} - \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{8}{\pi^2} - \frac{2}{\pi} \neq 0;$$

$$k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = 1/4.$$

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ \frac{1}{4}, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$k(x) = \sum_{s=1}^m \alpha_s \omega_s(x), \quad (8.17)$$

$$-\frac{d}{dx} k \frac{d\varphi_s^*}{dx} = p_s(x), \varphi_s^*(0) = \varphi_s^*(1) = 0, s = 1, 2, \dots, m, \quad (8.18)$$

где $p_s(x)$ - функция, связанная с измерением функционала

$$J_s = \int_0^1 p_s \varphi dx \quad (8.19)$$

$$-\int_0^1 \varphi_s^* \frac{d}{dx} k \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_s^* dx. \quad (8.20)$$

$$\int_0^1 k \frac{d\varphi_s^*}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_s^* dx. \quad (8.21)$$

$$J_s = \int_0^1 f \varphi_s^* dx. \quad (8.22)$$

$$0 = \int_0^1 f \varphi_s^* dx - \int_0^1 p_s \varphi dx.$$

$$\sum_{s'=1}^m \alpha_{s'} a_{ss'} = J_s, s = 1, 2, \dots, m, (8.23)$$

Где

$$a_{ss'} = \int_0^1 \omega_{s'} \frac{d\varphi_s^*}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx.$$

$$\sum_{s'=1}^m \alpha_{s'} a_{ss'} = J_s, s = 1, 2, \dots, m, m+1, m+n, (8.24)$$

$$E = \sum_{s=1}^{m+n} \left(J_s - \sum_{s'=1}^m \alpha_{s'} a_{ss'} \right)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_l} = -2 \sum_{s=1}^{m+n} a_{sl} \left(J_s - \sum_{s'=1}^m \alpha_{s'} a_{ss'} \right) = 0, l = 1, 2, \dots, m.$$

$$\sum_{s=1}^{m+n} a_{sl} \sum_{s'=1}^m a_{ss'} \alpha_{s'} = \sum_{s=1}^{m+n} s_{sl} J_s, l = 1, 2, \dots, m.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m+n,1} & \dots & a_{m+n,n} \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{bmatrix},$$

$$\beta = \begin{bmatrix} J_1 \\ \dots \\ J_{m+n} \end{bmatrix}.$$

$$A^T A \alpha = A^T \beta,$$

$$A \varphi = f, \quad (8.25)$$

$$A = \sum_{s'=1}^m \alpha_{s'} A_{s'}, \quad (8.26)$$

$$J_s = (p_s, \varphi) \quad (8.27)$$

$$A^* \varphi_s^* = p_s, s = 1, 2, \dots, m, m + 1. \quad (8.28)$$

$$(A\varphi, \varphi_s^*) - (\varphi, A^* \varphi_s^*) = (f, \varphi_s^*) - (p_s, \varphi). \quad (8.29)$$

$$(p_s, \varphi) = (f, \varphi_s^*)$$

$$J_s = (p_s, \varphi), J_s = (f, \varphi_s^*). \quad (8.30)$$

$$(A\varphi, \varphi_s^*) = (f, \varphi_s^*). \quad (8.31)$$

$$\sum_{s'=1}^m \alpha_{s'} a_{ss'} = J_s, s = 1, 2, \dots, m, m + 1, \dots, m + n \quad (8.32)$$

где

$$a_{ss'} = (A_{s'} \varphi, \varphi_s^*).$$

Система (8.32) переопределена. Решая ее методом наименьших квадратов, получаем неизвестные α_s ($s = 1, \dots, m$). Так решается обратная задача по восстановлению коэффициентов α_s в операторе A из (8.26). Отметим, что при ее решении описанном в данном параграфе способом предполагалось, что функции φ, φ_s^* известны. Ведь именно они определяют коэффициенты a_{ss}' в системе (8.32). Однако эти функции не всегда можно знать заранее. Оказывается, что в ряде случаев их можно заменить на некоторые "невозмущенные" функции - решения модельных задач, соответствующих задачам (8.25), (8.28). Это можно сделать на основе методов теории возмущений, о чем будет подробно рассказано в дальнейшем.

Возможны и другие модификации решения обратных задач. Опыт показывает, что во всех случаях применение сопряженных уравнений является весьма эффективным при решении обратных задач.

Список литературы:

1.Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций.-М.:ИВМ РАН, 2000. – 175 с.